

*financement IDEX DE L'UNISTRA*

*"T.P. par internet" - Questions*

---

## 1 Essai de traction - Travail pratique proposé

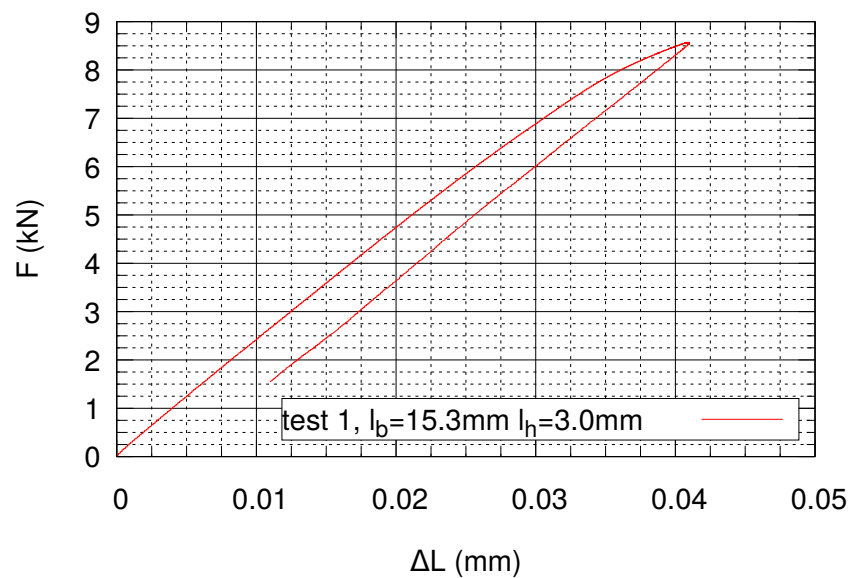


FIGURE 1 – Premier essai de traction uniaxiale, force vs allongement.

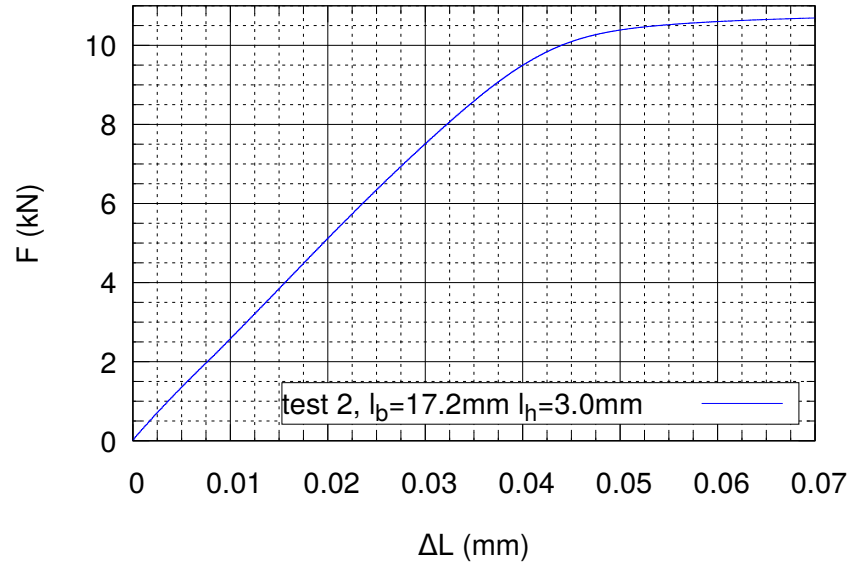


FIGURE 2 – Second essai de traction uniaxiale, force vs allongement.

### 1.1 Module d'élasticité

Deux essais de traction ont été effectués pour déterminer le comportement mécanique en traction uniaxiale de la nuance d'alliage d'aluminium dont est constituée la poutre du chapitre suivant. Les épaisseur  $l_h$  et largeur  $l_b$  des échantillons des tests sont données dans les Fig. 1 et Fig. 2. Calculez les sections transversales et calculez les contraintes de traction pour  $\Delta L = 0.02\text{mm}$ . Sachant que  $L_0 = 12.5\text{mm}$ , calculez la déformation correspondante. Déduisez de ces calculs le module d'élasticité du matériau.

### 1.2 Limite élastique

À partir des résultats d'essai des Fig. 1 et Fig. 2, estimez la limite élastique du matériau.

## 2 Théorie des poutres - Dispositif expérimental

### 2.1 Structure et son chargement

Des photos du dispositif sont disponibles sur le site internet, merci de bien vouloir les examiner attentivement. La poutre est droite, continue et orientée selon  $\vec{X}$  dans un repère  $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  où  $\vec{Z}$  désigne la perpendiculaire à la poutre et  $\vec{Y}$  l'axe des moments. Hauteur  $h$  selon  $\vec{Z}$  et largeur  $b$  selon  $\vec{Y}$  de la poutre sont constantes ainsi que le module d'élasticité  $E$  tout le long de la poutre. La poutre est appuyée en 1 sur un appui qu'on considérera comme

fixe, en 2 sur un appui qu'on considérera comme glissant selon  $\vec{X}$  et a son extrémité libre en 3 comme l'indique la Fig. 3.  $L_{12}$  désigne la distance du nœud 1 au nœud 2,  $L_{23}$  désigne la distance du nœud 2 au nœud 3,  $d_1$  désigne la distance du nœud 1 au point d'application de la force  $F_1$ ,  $d_2$  désigne la distance du nœud 1 au point d'application de la force  $F_2$ , les forces  $F_1$  et  $F_2$  sont orientées perpendiculairement à la poutre, i. e. selon  $\vec{Z}$ . Les hypothèses des petites perturbations<sup>1</sup> sont supposées respectées.

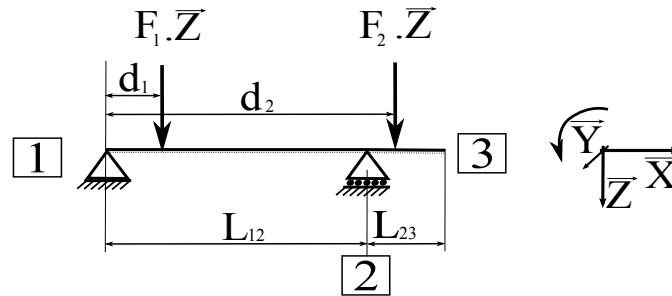


FIGURE 3 – Structure et son chargement.

## 2.2 Caractéristiques

Le module d'Young, désigné par  $E$ , de l'aluminium dont est constitué la poutre vaut  $63.3 \pm 1.2 \text{ GPa}$ . La longueur utile de la poutre est  $630 \pm 0.5 \text{ mm}$ .

|          |                           |  |          |                          |
|----------|---------------------------|--|----------|--------------------------|
| $b$      | $35.5 \pm 0.1 \text{ mm}$ |  | $h$      | $3 \pm 0.05 \text{ mm}$  |
| $L_{12}$ | $500 \pm 0.5 \text{ mm}$  |  | $L_{23}$ | $130 \pm 0.5 \text{ mm}$ |
| $d_1$    | $d_1 \pm 2 \text{ mm}$    |  | $d_2$    | $d_2 \pm 2 \text{ mm}$   |
| $F_1$    | $4.1 \pm 0.01 \text{ N}$  |  | $F_2$    | $4.1 \pm 0.01 \text{ N}$ |

TABLE 1 – Dimensions et Poids.

Quatre jauges de déformation sont collées sur la poutre, deux sur la face supérieure et deux sur la face inférieure, entre les nœuds 1 et 2 à  $L_J = 305 \pm 0.5 \text{ mm}$  du nœud 1. Elles forment un pont de Wheatstone dit "pont complet" afin de compenser les variations de température. La déformation sera désignée par  $\epsilon_{inf}$  et on considérera qu'il s'agit de la déformation de la fibre inférieure.

## 2.3 Déroulement des mesures

L'interface web vous demande deux valeurs  $d_1$  et  $d_2$  pour savoir où positionner respectivement  $F_1$  et  $F_2$ . Ensuite il vous faut patienter environ 8

1. Petites déformations et petits déplacements.

minutes pendant la calibration des vérins et la mesure de la déformée initiale de la poutre par le capteur de distance laser. L'appareil fait ensuite rouler les masses correspondant à  $F_1$  et  $F_2$  aux positions  $d_1$  et  $d_2$  demandées. Le capteur de distance laser fait un second passage pour mesurer la déformée actuelle. Il vous faut à nouveau patienter environ 7 minutes. Les résultats sont rafraîchis sur le graphique à l'écran. Vous pouvez aussi suivre le déroulement en cliquant sur le lien de la webcam. Finalement, au bout d'environ 15 minutes de patience, toutes les mesures sont effectuées. Elles sont stockées dans le fichier "resultats.dat" que vous pouvez télécharger pour les exploiter (voir A.1). Vous pouvez recommencer une autre expérimentation avec des valeurs obligatoirement différentes pour  $d_1$  et/ou  $d_2$ . Attention, il faut veiller à télécharger les résultats avant de lancer de nouvelles mesures car le contenu du fichier "resultats.dat" sera remplacé par les nouvelles mesures.

### 3 Théorie des poutres - Travail pratique proposé

Vous pouvez demander à positionner les forces sur la poutre : la force  $F_1$  pour  $d_1 \in [0, 250mm]$  et  $F_2$  pour  $d_2 \in [452, 630mm]$ . Si vous ne voulez pas utiliser  $F_1$ , entrer  $-30mm$  pour  $d_1$ . Si vous ne voulez pas utiliser  $F_2$ , entrer  $652mm$  pour  $d_2$ .

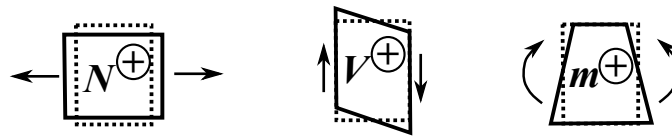


FIGURE 4 – Conventions de signe pour l'effort normal  $N$ , l'effort tranchant  $V$  et le moment fléchissant  $M$ .

#### 3.1 Superposition

Positionnez la force  $F_1$  à une distance  $d_1 \in [0, 250mm]$  de votre choix et demandez  $d_2 = 652mm$  pour la forces  $F_2$  de sorte qu'elle ne charge pas la poutre. Sauvegardez les résultats et renommez "resultats.dat" par exemple en "resultats1.dat" (voir A.1).

Positionnez ensuite la force  $F_2$  à une distance  $d_2 \in [452, 630mm]$  et demandez  $d_1 = -30mm$  pour la forces  $F_1$  de sorte qu'elle ne charge pas la poutre. Sauvegardez les résultats et renommez "resultats.dat" par exemple en "resultats2.dat".

Positionnez les forces  $F_1$  et  $F_2$  aux mêmes distances que précédemment de sorte qu'elles agissent simultanément pour charger la poutre. Sauvegardez les résultats et renommez "resultats.dat" par exemple en "resultats3.dat".

Les effets cumulés - réaction d'appui, déplacements, déformation - de ces forces sont-ils égaux à l'effet des actions simultanées de ces forces ? Précisez

dans quels cas votre conclusion est valable.

### 3.2 Calcul des réactions d'appui

Positionnez les forces  $F_1$  et  $F_2$  à des distances  $d_1$  et  $d_2$  de votre choix - vous pouvez réutiliser le résultat précédent. Les réactions d'appui mesurées par les capteurs de force apparaissent à l'écran. Étudiez l'équilibre statique de la poutre, calculez la prédiction théorique pour ces réactions, comparez puis commentez.

### 3.3 Moment fléchissant

Tracez les diagrammes d'effort tranchant, désigné par  $V(x)$ , et de moment fléchissant, désigné par  $M(x)$ . Précisez la valeur à l'emplacement des jauges, i. e.  $M(L_J)$ . Calculez le moment quadratique de la poutre puis comparez la prédiction théorique de la déformation  $\epsilon_{inf}$  à  $x = L_J$  à celle mesurée. Concluez.

Calculez le moment fléchissant correspondant à l'atteinte de la limite élastique  $\sigma_{el}$ , puis le moment résistant correspondant à la plastification complète de la section  $\sigma_{pl}$ , en l'absence d'effort tranchant et d'effort normal, i. e. en flexion pure.

### 3.4 Flèche

Expliquez pourquoi le tracé de  $f\_a$  n'est pas pertinent mais celui de  $(f\_a - f\_i)$  l'est. À l'aide du logiciel de votre choix tracez la déformée expérimentale de la poutre désignée par  $w(x)$ . Calculez la prédiction théorique de cette déformée - ce calcul est un peu plus long que les précédents - puis tracez la sur la même graphe. Commentez et concluez.

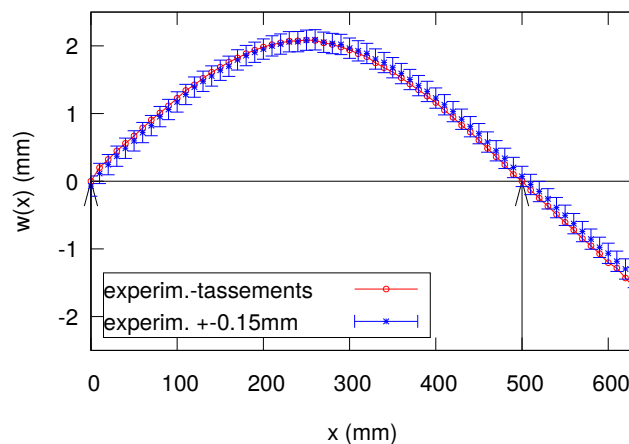


FIGURE 5 – Allure typique d'une déformée.

La Fig. 5 montre l'allure d'une déformée mesurée expérimentalement pour  $d_1 = 250 \pm 1mm$  et  $d_2 = 500 \pm 1mm^2$ . Les barres d'erreur en bleu concernent les mesures brutes  $\pm 0.15mm$ , i.e. valeurs  $(f_a - f_i)$  non corrigées des tassements d'appui. La courbe en rouge représente les valeurs  $(f_a - f_i)$  corrigées des tassements d'appui<sup>3</sup>. Pour information, dans le cas particulier présenté en exemple, la déformée liée aux tassements d'appui à retrancher aux mesures vaut  $y(mm) = 2.86 \cdot 10^{-4} \times x(mm) - 7.2 \cdot 10^{-2}$ . C'est bien évidemment l'équation d'une droite qui passe par les deux appuis.

## 4 Incertitudes - Travail pratique proposé

### 4.1 Calcul des barres d'erreur - approche numérique

En utilisant les résultats théoriques précédent, calculez les valeur minimales et maximales des prédictions théoriques en fonctions des incertitudes de mesures. Par exemple si le théorie indique que  $a = \frac{b}{c}$  et que  $b > 0$  est mesuré à  $\pm \Delta_b$  près et  $c > 0$  est mesuré à  $\pm \Delta_c$  près avec  $\Delta_b > 0$  et  $\Delta_c > 0$  alors il est évident qu'en divisant la plus grande valeur possible par la plus petite possible et réciproquement<sup>4</sup> nous obtiendrons pour le résultat de la division la plus grande valeur possible ainsi que la plus petite possible :

$$a_{min} = \frac{b - \Delta_b}{c + \Delta_c} \quad \text{et} \quad a_{max} = \frac{b + \Delta_b}{c - \Delta_c} \quad (1)$$

Avec votre calculatrice, faites ce type d'estimation pour les réactions d'appui, la déformation puis la flèche. L'intervalle d'incertitude des valeurs théoriques a-t-il une intersection non nulle avec l'intervalle d'incertitude des mesures (voir A.2). Qu'en concluez-vous ?

### 4.2 Calcul des barres d'erreur - approche mathématique

Remarquons que  $\frac{b - \Delta_b}{c + \Delta_c} = \frac{(b - \Delta_b)(c - \Delta_c)}{(c + \Delta_c)(c - \Delta_c)}$  donc  $a_{min} = \frac{cb - c\Delta_b - b\Delta_c + \Delta_b\Delta_c}{c^2 + \Delta_c^2}$ . Les termes  $\Delta_b\Delta_c$  et  $\Delta_c^2$  sont des termes du second ordre et peuvent être négligés devant les autres termes. Il vient :

$$a_{min} = \frac{cb - c\Delta_b - b\Delta_c}{c^2} = a - \Delta_b/c - \Delta_c b/c^2 \quad (2)$$

---

2. Dans ce cas la force  $F_2$  agit directement sur l'appui 2 et ne contribue pas à la flexion de la poutre.

3. Tassements liés à la mesure des réaction d'appui, les capteurs de force sont des appuis élastiques et le bâti de mesure subit aussi des déformations élastiques, voire des rattrapages de jeu.

4. il y a quatre cas possibles de combinaison de  $\Delta_b$  avec  $\Delta_c$  :  $+\Delta_b$  et  $+\Delta_c$ ,  $+\Delta_b$  et  $-\Delta_c$ ,  $-\Delta_b$  et  $+\Delta_c$ ,  $-\Delta_b$  et  $-\Delta_c$

Si la question est de connaître la précision relative attendue sur la valeur de  $a$ , calculons  $\frac{a-a_{min}}{a} = \frac{c(a-a_{min})}{b}$  puisque  $a = \frac{b}{c}$ . De 2 il vient :

$$\frac{a - a_{min}}{a} = \frac{\Delta_a}{a} = \frac{\Delta_b}{b} + \frac{\Delta_c}{c} \quad (3)$$

Calculez  $\frac{a_{max}-a}{a}$  et montrez que cela donne la même chose.

Les imprécisions se cumulent en valeur absolues. D'une façon générale pour notre cas à deux paramètres  $\delta_a = \frac{\partial a}{\partial b}\delta_b + \frac{\partial a}{\partial c}\delta_c$ . Nous pouvons donc affirmer que  $|\Delta_a| = |\frac{\partial a}{\partial b}\Delta_b| + |\frac{\partial a}{\partial c}\Delta_c|$ .

D'une façon encore plus générale on peut montrer que si  $a$  est fonction de plusieurs paramètres  $b, c, d, \dots$ , i. e.  $a = f(b, c, d, \dots)$  alors il vient pour l'écart absolu :

$$|\Delta_a| = \left| \frac{\partial f(b, c, d, \dots)}{\partial b} \Delta_b \right| + \left| \frac{\partial f(b, c, d, \dots)}{\partial c} \Delta_c \right| + \left| \frac{\partial f(b, c, d, \dots)}{\partial d} \Delta_d \right| + \dots \quad (4)$$

ce qui donne pour l'écart relatif :

$$\left| \frac{\Delta_a}{a} \right| = \left| \frac{b \partial f(b, c, d, \dots)}{a \partial b} \frac{\Delta_b}{b} \right| + \left| \frac{c \partial f(b, c, d, \dots)}{a \partial c} \frac{\Delta_c}{c} \right| + \left| \frac{d \partial f(b, c, d, \dots)}{a \partial d} \frac{\Delta_d}{d} \right| + \dots \quad (5)$$

Dand le cas où  $a$  est de la forme  $a = b.x_1^{n_1}.x_2^{n_2}.x_3^{n_3} \dots$  on obtient donc :

$$\left| \frac{\Delta_a}{a} \right| = \left| n_1 \frac{\Delta_{x_1}}{x_1} \right| + \left| n_2 \frac{\Delta_{x_2}}{x_2} \right| + \left| n_3 \frac{\Delta_{x_3}}{x_3} \right| + \dots \quad (6)$$

Reprenez les calculs d'intervalles d'incertitude en vous inspirant de ces dernières équations. Concluez.

## A Annexes

### A.1 Structure du fichier "resultats.dat"

Le fichier "resultats.dat" contient 16 colonnes. Les 8 premières colonnes (indices `_i`) concernent l'état initial, i. e. pour  $F_1 = 0$  et  $F_2 = 0$ . Les 8 colonnes suivantes (indices `_a`) concernent l'état actuel sous le chargement demandé pour  $F_1$  et/ou  $F_2$  non nul/s. Chaque ligne du fichier correspond à une acquisition de données et à une position du capteur de distance laser. La position mesurée des masses après mouvement des vérins est sauvegardée et peu légèrement différer de la position demandée. Bien sûr seule la flèche de la poutre, i. e.  $w(x)$ , est censée dépendre de la position du capteur de distance laser. Les petites fluctuations des autres valeurs ne reflètent que le bruit de mesure, à l'exception de la température qui peut légèrement varier pendant l'essai. Le capteur de distance laser est très précis mais la mesure doit intégrer l'élasticité des capteurs de force<sup>5</sup>, les rattrapages de jeu et diverses rotations parasites liées aux imperfections du montage expérimental.

5. Car il faut mesurer une déformation pour en déduire la force.

Si l'on souhaite une excellente précision, il conviendra donc de retrancher le tassement d'appui à la distance mesurée. Dans ce dernier cas cherchez l'équation de la droite qui passe par les deux appuis, sinon prenez simplement  $f\_a \pm 0.15mm$ .

## A.2 Incertitudes des mesures

| désignation | unité       | description                                 | précision        |
|-------------|-------------|---|------------------|
| $x\_i$      | mm          | distance x pour les mesures initiales       | $\pm 0.5mm$      |
| $d_{1\_i}$  | mm          | position initiale de la force $F_1$         | $\pm 2mm$        |
| $d_{2\_i}$  | mm          | position initiale de la force $F_2$         | $\pm 2mm$        |
| $f\_i$      | mm          | cote $w(x)$ initiale de la poutre           | $\pm 1\mu m$     |
| $R_{1\_i}$  | N           | force de réaction initiale à l'appui 1      | $\pm 0.05N$      |
| $R_{2\_i}$  | N           | force de réaction initiale à l'appui 2      | $\pm 0.05N$      |
| $epsil\_i$  | $\mu m/m$   | déformation init. en fibres sup. et inf.    | $\pm 5\mu m/m$   |
| $Temp\_i$   | $^{\circ}C$ | température initiale                        | $\pm 1^{\circ}C$ |
| $x\_a$      | mm          | distance x pour les mesures actuelles       | $\pm 0.5mm$      |
| $d_{1\_a}$  | mm          | position actuelle de la force $F_1$         | $\pm 2mm$        |
| $d_{2\_a}$  | mm          | position actuelle de la force $F_2$         | $\pm 2mm$        |
| $f\_a$      | mm          | cote $w(x)$ actuelle de la poutre           | $\pm 1\mu m$     |
| $R_{1\_a}$  | N           | force de réaction actuelle à l'appui 1      | $\pm 0.05N$      |
| $R_{2\_a}$  | N           | force de réaction actuelle à l'appui 2      | $\pm 0.05N$      |
| $epsil\_a$  | $\mu m/m$   | déformation actuelle en fibres sup. et inf. | $\pm 5\mu m/m$   |
| $Temp\_a$   | $^{\circ}C$ | température actuelle                        | $\pm 1^{\circ}C$ |

TABLE 2 – Colonnes du fichier "resultats.dat" et incertitudes de mesure.